

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ



На правах рукописи

ЕФАНОВ Дмитрий Евгеньевич

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОХРАНЕНИЯ ЗАДАННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗДУШНОГО СУДНА ПРИ
РЕКОНФИГУРАЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

05.22.14 – Эксплуатация воздушного транспорта

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном унитарном предприятии Государственный научно-исследовательский институт гражданской авиации (ФГУП ГосНИИ ГА) Министерства транспорта Российской Федерации.

Научный руководитель: заместитель генерального директора Федерального государственного унитарного предприятия «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем», доктор технических наук, профессор
Косьянчук Владислав Викторович.

Официальные оппоненты: заместитель главного конструктора Акционерного общества Московский научно-производственный комплекс «Авионика» им. О. В. Успенского (г. Москва), доктор технических наук, доцент Бронников Андрей Михайлович;

заместитель Генерального директора Общества с ограниченной ответственностью «Экспериментальная мастерская НаукаСофт», кандидат технических наук Патрикеев Андрей Павлович.

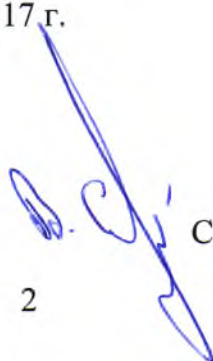
Ведущая организация: Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского» (г. Москва).

Защита состоится «27» сентября 2017 года в 14:00 на заседании Диссертационного Совета Д 223.011.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет гражданской авиации» (ФГБУ ВО «МГТУ ГА») по адресу: 125993, Москва, бул. Кронштадтский, д. 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте www.mstuca.ru ФГБУ ВО «МГТУ ГА».

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор



Самойленко Василий Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Повышение безопасности полетов (БП) воздушных судов (ВС) определяет актуальность разработки систем управления (СУ), способных выявлять отказы и компенсировать их последствия. Современные ВС характеризуются высокой степенью аналитической (функциональной) избыточности исполнительных подсистем СУ, поэтому при возникновении отказов существует возможность перераспределения функций. При этом на современном этапе функциональная (аналитическая) реконфигурация исполнительной подсистемы СУ ВС не используются в полной мере.

Различают пассивный и активный подходы к реконфигурации СУ. В пассивном подходе целью является получение такого закона управления (ЗУ), который удовлетворяет всем заданным критериям как в штатных, так и в нештатных ситуациях. Здесь же выделяют надежный и робастный подходы. Надежность достигается за счет того, что законы реконфигурации рассчитываются предварительно на основе анализа характеристик ВС в различных ситуациях, включая аварийные. В процессе синтеза для обеспечения надежности, как правило, стараются получать решения с минимальным числом элементов в каналах управления. Робастные пассивные ЗУ обеспечивают низкую чувствительность заданных критериев к изменениям параметров отказов. Полученные законы управления встраиваются в СУ или подключаются к управлению при возникновении отказов.

Активный подход основан на использовании схем идентификации отказов. В процессе идентификации необходимо вовремя обнаружить, локализовать и при необходимости диагностировать возникающий отказ, который может привести к снижению уровня БП. Быстродействие алгоритмов должно быть достаточно высоким, чтобы не допустить развитие аварийной ситуации в полете, вовремя проинформировать экипаж и осуществить эффективную компенсацию последствий отказа. Перспективным направлением являются гибридные подходы к реконфигурации СУ, в которых осуществляется интеграция пассивных и активных методов.

Большинство современных практических методов реконфигурации СУ основано на применении численных статистических алгоритмов. Статистические алгоритмы характеризуются высокими вычислительными затратами и, соответственно, низкими показателями быстродействия. Определение точных и достоверных решений с помощью таких алгоритмов требует большого объема данных. Численные решения не позволяют осуществлять аналитические исследования получаемых результатов и формировать рекомендации по устранению причин неразрешимости той или иной задачи, что существенно затрудняет синтез надежных законов реконфигурации СУ ВС.

Для устранения вышеназванных недостатков в работе расширяется область использования аналитических методов решения задач за счет синтеза аналитических ЗУ, обеспечивающих сохранение заданных характеристик устойчивости при реконфигурации СУ. Далее представляются результаты проведенных исследований в этом направлении.

Степень разработанности. Проблемам повышения БП ВС за счет реконфигурации СУ при отказах исполнительной подсистемы посвящены труды многих отечественных авторов: Акимов А.Н., Воробьев В.В., Коноплев Ю.К., Шабалин В.А. и др. Их работы в значительной мере способствовали изучению вопросов численной реконфигурации СУ ВС при непрогнозируемых отказах в разомкнутом контуре управления.

Разработка аналитических методов реконфигурации СУ является сравнительно новым направлением повышения БП ВС. Существенный вклад в разработку данных методов внесли Косьянчук В.В., Зыбин Е.Ю., Халдин Е.В., Гласов В.В., Колодяжная Т.А. Их работы содержат фундаментальные основы синтеза надежных законов реконфигурации СУ, мате-

математическую основу которых составили аналитические методы решения матричных уравнений, развитию которых посвящены работы Букова В.Н., Рябченко В.Н., Косьянчука В.В., Мисриханова М.Ш., Асанова А.З., Зыбина Е.Ю., Сапожникова А.В.

Однако в трудах этих ученых недостаточно уделено задаче обеспечения заданных характеристик устойчивости при реконфигурации СУ при отказах и повреждениях элементов исполнительской подсистемы. Поэтому результаты, полученные в этих работах, не могут быть в полной мере использованы при решении задачи реконфигурации СУ ВС.

Рамки исследований. Область математических моделей ограничена полностью наблюдаемыми моделями ВС в пространстве состояний. Не учитываются динамические свойства исполнительных устройств, а также ограничения на амплитуды и скорости отклонения РП. Область исследуемых отказов ограничена множественными внезапными отказами исполнительской подсистемы пилотажного контура СУ ВС, в том числе вызванными внешними повреждениями. Не рассматриваются перемежающиеся и компонентные отказы, а также, отказы измерительных и информационных подсистем. Теоретические исследования ограничены линейными стационарными динамическими системами с многими входами и многими выходами (ММО – Multi Input Multi Output). Анализ полученных результатов осуществляется на примерах линейных математических моделей ВС.

Целью диссертационной работы является повышение безопасности полета воздушных судов в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов системы управления.

Научной задачей диссертационной работы является разработка аналитического подхода к решению задачи сохранения устойчивости и управляемости воздушного судна при реконфигурации системы управления в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов.

Объектом исследований высокоавтоматизированная система управления воздушного судна.

Предметом исследований является алгоритмическое обеспечение системы управления воздушного судна, позволяющее решать задачу реконфигурации при отказах и повреждениях исполнительных элементов.

Положения, выносимые на защиту:

- аналитический подход к решению задачи сохранения устойчивости и управляемости воздушного судна при реконфигурации системы управления в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов;
- методика построения множества эквивалентных аналитических законов реконфигурации системы управления воздушного судна, обеспечивающих заданные характеристики устойчивости в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов;
- аналитические выражения стабилизирующих законов управления для линеаризованных моделей продольного и бокового движения воздушного судна;
- методика практического использования разработанных законов реконфигурации системы управления воздушного судна в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов.

Научная новизна диссертации состоит в следующем:

1. Впервые на основе декомпозиционного метода размещения полюсов и учета информации о параметрах воздушного судна в исправном и неисправном состояниях решена задача реконфигурации системы управления воздушного судна, обеспечивающая заданные характеристики устойчивости.

2. Впервые для линеаризованных моделей продольного и бокового движения воздушного судна с учетом перекрестных связей между каналами рулевых органов получены аналитические (символьные) выражения стабилизирующих законов управления.
3. Доказано, что использование реконфигурации законов управления при сохранении управляемости воздушного судна, позволяет полностью компенсировать последствия отказов и повреждений исполнительных элементов системы управления в каждом из каналов управления.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии аналитических методов реконфигурации системы управления воздушного судна, обеспечивающих заданные характеристики устойчивости в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов.

Практическая значимость результатов определяется следующим:

1. Законы реконфигурации системы управления ВС, полученные на основе аналитического множества, являются стабилизирующими (обеспечивают устойчивость движения летательного аппарата) и ориентированы на вычислительную и исполнительную элементную базу умеренного уровня характеристик. Показано, что применение данного подхода позволяет успешно парировать последствия отказов исполнительных элементов системы управления.
2. Эффективность предлагаемых алгоритмов реконфигурации продемонстрирована на задаче реконфигурации системы управления самолета. Характер динамических процессов, достигаемый за счет предлагаемых алгоритмов, позволяет обеспечить безопасность полета при возникновении отказов рулей высоты и элеронов в широком диапазоне высот и скоростей полета.

Методология и методы исследований. Исследуются аналитические методы синтеза законов реконфигурации системы управления с учетом структурных и параметрических изменений математической модели воздушного судна.

Математическую основу аналитического подхода составляют аналитические матричные методы решения систем уравнений, базирующиеся на псевдообратных матрицах и матричных делителях нуля (аннуляторах матриц).

Отличительными особенностями подхода являются: аналитические формулы законов управления, обеспечивающих заданное размещение полюсов; «прозрачная» структура и правила построения множества эквивалентных законов управления; универсальность подхода решению задач синтеза законов управления в нормальных и аварийных режимах.

Расчеты и математическое моделирование, выполненные в диссертации, производились в программной среде Matlab.

В диссертации разработаны теоретические положения аналитической реконфигурации системы управления воздушного судна с обеспечением заданных характеристик устойчивости при отказах исполнительных элементов системы управления.

На основании выполненных исследований решена задача обеспечения отказоустойчивости системы управления полетом воздушного судна при отказах исполнительных подсистем путем функциональной реконфигурации управления аналитическими методами, имеющая важное народно-хозяйственное значение.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с **паспортом по специальности 05.22.14 – Эксплуатация воздушного транспорта п. 2 «Разработка методологических основ и инженерно-авиационных методов и средств обеспечения безопасности полетов, расследования авиационных происшествий и инцидентов», п. 5 «Развитие теории и методологии совершенствования методов и форм организации, систем и технологических процессов эксплуатации объектов воздушного транспорта», п. 7 «Совершенствование методов и средств управления и планирования, повышения эффективности деятельности авиапред-**

приятий, механизации и автоматизации процессов эксплуатации воздушного транспорта» и п. 11 «Разработка научных основ и методов обеспечения и сохранения летной годности воздушных судов в процессе эксплуатации».

Степень достоверности и апробация результатов. Методы и алгоритмы, разработанные автором, базируются на фундаментальных результатах теории управления динамическими системами, справедливость которых доказана ранее. Математические модели ВС и их СУ протестированы на соответствие реальным объектам на основе многократного сравнения результатов моделирования с результатами летных экспериментов.

Материалы работы докладывались на Workshop on Contemporary Materials and Technologies in the Aviation Industry (СМТАИ 2016). Moscow, Russia, December 15–16, 2016; Конференции «Концепция развития системы безопасности полетов ВС РФ», г. Щелково, 29 декабря 2016 г., войсковая часть 45095; Конференции «Авиационная кибербезопасность», г. Москва, 15-16 февраля 2017 г., ФГУП ГосНИИ ГА, Минтранс России.

Результаты исследований использованы в процессе выполнения НИР «Исследования по созданию отказобезопасных электромеханических рулевых приводов воздушных судов на основе инновационных алгоритмических и инновационных решений», шифр «Нагрузатель», выполненные по государственному контракту от 17.02.2014 г. №14411.17Б9999.18.009, при формировании облика отказоустойчивой системы управления самолета гражданской авиации нормальной категории.

Публикации. По материалам диссертации автором опубликовано в период с 2013 г. по 2017 г. 9 научных работ, из них в изданиях из списка ВАК – 6 (Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана, серия «Приборостроение» – 2, «Автоматизация. Современные технологии» – 1, Научный вестник ГосНИИ ГА – 1, Вестник компьютерных и информационных технологий – 1, Электро. Электротехника, электроэнергетика, электротехническая промышленность – 1).

Личный вклад автора. Основные результаты работы являются оригинальными и получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии, что подтверждено публикациями в научных изданиях. В опубликованных в соавторстве работах автору принадлежат постановка задачи, анализ проблем, результаты теоретических (аналитических) и практических исследований, рекомендации по практическому использованию алгоритмов и методов.

Структура и объем диссертации. Структурно работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы из 97 наименований, списка сокращений, списка иллюстративного материала и 2-х приложений общим объемом 139 страниц печатного текста. Основная часть диссертации изложена на 134 страницах и содержит 20 рисунков и 6 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе анализируются наиболее характерные отказы, возникающие на борту ВС, а также вызываемые ими последствия. Показывается, что по данным статистики гражданской авиации за последние 50 лет более 50% авиационных катастроф происходило по причине потери управляемости ВС.

В настоящее время основным средством обеспечения отказоустойчивости СУ является резервирование. Однако резервирование СУ не позволяет обеспечить требуемую БП в полной мере. Использование функциональной (аналитической) избыточности СУ является наиболее целесообразным способом обеспечения отказоустойчивости СУ современных и перспективных ВС. Функциональная избыточность исполнительных подсистем позволяет использовать одну и ту же рулевую поверхность (РП) для управления в различных кана-

лах. В этом случае для повышения БП ВС при возникновении отказов необходимо осуществлять реконфигурацию СУ путем перераспределения функций отказавших элементов на исправные.

Приводится краткий обзор подходов к реконфигурации СУ. В зависимости от наличия информации об отказах и способах использования избыточности исполнительных подсистем подходы к реконфигурации СУ подразделяются на две категории: пассивные (безопасные и надежные) и активные (проеекционные и оперативные). Пассивные законы реконфигурации реализуются с помощью предварительно рассчитанных коэффициентов для всех требуемых отказов и их комбинаций. Активные законы компенсируют возникающие отказы путем оперативной реконфигурации СУ на основе информации от системы идентификации отказов. Наиболее перспективным направлением является разработка гибридных законов реконфигурации СУ, когда интегрируются пассивные и активные методы.

Эффективность отказоустойчивой СУ зависит от времени идентификации отказов, точности идентифицируемых параметров моделей, а также времени, необходимого для реконфигурации управления. Возникновение отказа в СУ может привести к аварийной ситуации, поэтому время, необходимое для идентификации, анализа и реконфигурации существенно ограничено. Необходимость обеспечения продолжения полета при возникновении любого отказа, возможно с дополнительными ограничениями, является основной целью отказоустойчивой СУ. Используемые при построении СУ алгоритмы должны иметь низкие вычислительные затраты и высокую степень точности.

Подавляющее большинство современных методов оптимальной и робастной реконфигурации СУ основаны на применении численных статистических алгоритмов. Такие решения не позволяют осуществлять аналитическое исследование получаемых результатов и формировать рекомендации по устранению причин неразрешимости той или иной задачи. Они характеризуются высокими вычислительными затратами и низкими показателями быстродействия. Определение точных и достоверных решений с помощью алгоритмов численной оптимизации требует большого объема измерений. Поэтому основным требованием к получаемым решениям является их аналитичность и замкнутость.

Законы функциональной реконфигурации, в отличие от аппаратной, не являются статичными и должны быть адаптивными по параметрам полета. Построение полноценных адаптивных алгоритмов активной реконфигурации управления ВС сдерживается нерешенными проблемами идентификации замкнутых динамических систем. Поэтому адаптивные свойства законам реконфигурации придают за счет прямой коррекции их коэффициентов по параметрам движения ВС с использованием аналитических методов синтеза.

Достаточно эффективное использование возможностей аналитических методов синтеза продемонстрировано в работах Косьянчука В.В., Зыбина Е.Ю. и других авторов. Однако в этих работах решается задача сохранения эффективности управления при реконфигурации – то есть максимального сохранения стереотипа управления. При невозможности точного сохранения показателей эффективности осуществляется поиск оптимального решения, гарантирующего минимальное отклонение полюсов реконфигурированной системы, что, однако, никак не гарантирует сохранения устойчивости ВС как в процессе переключения ЗУ, так и после.

В общем случае проблема обеспечения устойчивости при переключении управления рассматривается в теории динамических переключаемых систем (систем с переключением), которая достаточно интенсивно развивается в последние десятилетия. Причины возникновения и становления этой теории заключаются в следующем.

Известно, что с большой степенью адекватности реальные динамические процессы описываются нелинейными моделями в виде нелинейных дифференциальных или дис-

кретных уравнений. Зачастую нелинейные характеристики могут быть аппроксимированы кусочно-линейными функциями (как это делается, например, при аппроксимации аэродинамических коэффициентов в зависимости от режима полета). Таким образом, нелинейные динамические системы с заданной степенью приближения можно представить в виде некоторой последовательности переключаемых по определенным законам линейных систем. Это позволяет рассматривать нелинейные системы как вид переключаемых или логико-динамических систем.

Другой класс переключаемых систем характеризуется переключающимся управлением. Этот класс систем появляется, во-первых, когда существуют резкие изменения в параметрах и/или структуре динамической системы (отказы, ремонт, влияние внешней среды), и, во-вторых, когда в системе присутствует переключаемый регулятор.

Отметим, что переключаемые системы широко используются в различных отраслях народного хозяйства при управлении механическими системами, технологическими процессами, в преобразователях энергии, интеллектуальных системах и робототехнике.

Одной из наиболее важных проблем в теории динамических систем с переключением является обеспечение устойчивости протекающих процессов. При исследовании устойчивости выделяют три задачи.

Первая задача состоит в определении условий, гарантирующих устойчивость системы для любого переключающего сигнала.

Вторая задача заключается в определении классов сигналов переключения, при которых система будет асимптотически устойчивой. Здесь можно указать результат, согласно которому в предположении, что все отдельные системы устойчивы в отдельности, то устойчивость гарантируется при достаточно медленных переключениях.

Третья задача состоит в конструировании сигнала переключения, который обеспечивает устойчивость системы. Эта задача имеет смысл только в том случае, если ни одна из переключающихся систем не является неустойчивой.

Задача обеспечения заданных характеристик устойчивости в динамических системах рассматривалась в многочисленных работах, но свою актуальность не утратила. Иначе она называется задачей размещения полюсов (pole placement), задачей размещения собственных значений (eigenvalue assignment) или модальным управлением (modal control). В данной работе рассматриваются методы размещения полюсов применительно к управлению ВС, рассматриваемому как МИМО-система.

Число разработанных за последнее время методов размещения полюсов (модальных методов) и их разнообразных модификаций для линейных систем, заданных в пространстве состояний, неуклонно растет. К наиболее часто цитируемым относятся методы Басса и Гура, Аккерманна, Мейна и Мардоха, Маки и ван де Вейта, Барнетта, Гоуришанкара и Ремера, Мура, Клейна и Мура, Портера и Д'Аццо, Уонема, Мунро, Флемма, Варги, Феми и О'Рейли, Каутского, Никольса и Ван Доорена и др. Из перечисленных методов только четыре допускают получать решение задачи размещения полюсов в аналитическом виде, а именно, Аккерманна, Басса-Гура, Уилкинсона, Эрзерберга.

Однако каждый из этих методов имеет свои существенные ограничения, не позволяющие их использовать для решения задачи реконфигурации. Так метод Аккерманна, основанный на обеспечении заданных коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы, имеет то ограничение, что он разработан для систем с одним входом и одним выходом (SISO – Single Input Single Output). Кроме того, уже при размерности характеристического полинома более 8 возникают существенные ошибки в задании полюсов из-за ошибок (погрешностей) в задании исходных коэффициентов. Метод Басса-Гура предназначен для модального синтеза регуляторов систем со многими входами. Суть метода со-

стоит в использовании известного свойства управляемости системы. Этот метод имеет алгебраический характер и представляет собой алгоритм синтеза Басса-Гура, сформулированный в условиях векторного входа. Такой подход приводит к сужению множества регуляторов, обеспечивающих системе одно и то же расположение полюсов, поскольку вместо имеющегося множества входов системы фактически используется только один. Кроме того, существенным ограничением метода Басса-Гура является необходимость обращения неразрезанных (плотных) матриц управляемости высокого порядка, составленных из векторов из подпространств Крылова. Обращение таких матриц для системы, например 8-го порядка, уже практически невозможно.

Метод модального синтеза Уилкинсона не имеет ограничений метода Басса-Гура, однако характеризуется не менее существенными ограничениями: 1) исходная матрица собственной динамики должна быть циклической, т.е. матрица, составленная из собственных векторов должна быть обратима; 2) собственные значения, не являющиеся действительными, должны образовывать комплексно-сопряженные пары; 3) комплексно-сопряженным собственным значениям должны соответствовать комплексно-сопряженные векторы постоянных параметров; 4) ни одно собственное значение замкнутой системы не должно совпадать с собственными значениями разомкнутой системы.

Метод Эрзбергера относится к методам решения задач слежения за моделью. Эта задача в общем случае формулируется следующим образом: можно ли управлять процессом (объектом) так, чтобы он вел себя как заданная модель? Такая задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия, называемые условиями Эрзбергера. Эти условия накладывают существенные ограничения на вид желаемой матрицы собственной динамики, а также столбцы матрицы эффективности управления. Более того, до сих пор не решены в аналитическом виде вопросы задания «хорошей» матрицы желаемой собственной динамики (т.н. проблема матричного пополнения).

Таким образом, ни один из широко известных методов не позволяет решить задачу обеспечения заданных характеристик устойчивости в аналитическом виде.

Недавно отечественным ученым Рябченко В.Н. был разработан кардинально новый подход к размещению полюсов в замкнутой системе, названный декомпозиционным методом. В основе метода лежит специфическое преобразование подобия представления исходной системы, выполняемое на основе матричных делителей нуля и псевдообратных матриц. Получаемое представление преобразованной системы содержит в явном виде элементы, изменение которых с помощью обратной связи (ЗУ) позволяет обеспечить заданное (точное) расположение полюсов замкнутой ММО-системы в аналитическом виде. Данный метод также имеет существенное ограничение – обязательную независимость столбцов матрицы эффективности управления ВС, которое не выполняется в связи с наличием функциональной избыточности СУ. Однако проведенные исследования показывают возможность его модификации и построения аналитического решения задачи размещения полюсов при реконфигурации. Более того, возможно описание конечного решения в виде аналитического формализованного множества, что позволяет ставить и решать дополнительные задачи, в том числе, задачу плавного переключения закона управления, что особенно важно при возникновении отказов.

В заключение первого раздела формулируется постановка задачи исследований, заключающаяся в поиске решения задачи сохранения заданных характеристик устойчивости ВС при реконфигурации СУ в случае возникновения отказов и повреждений исполнительной подсистемы, базирующееся на решении следующих частных задач:

во-первых, разработать модификацию декомпозиционного метода размещения полюсов, позволяющую обеспечивать построение в явном (аналитическом) виде множества

эквивалентных законов управления СУ ВС при функциональной избыточности исполнительной подсистемы;

во-вторых, разработать методику и алгоритмы аналитического решения задачи сохранения заданных характеристики устойчивости ВС при реконфигурации СУ на основе модифицированного метода размещения полюсов;

в-третьих, на примере управления движением ВС отработать методику практического использования разработанных алгоритмов реконфигурации СУ перспективных самолетов гражданской авиации.

Второй раздел рассматривается декомпозиционный метод размещения полюсов и его модификация, позволяющая обеспечивать построение в явном (аналитическом) виде множества эквивалентных законов управления СУ ВС при функциональной избыточности исполнительной подсистемы.

Рассмотрим линейную ММО-систему, уравнения которой заданы в виде

$$\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (1)$$

Здесь t – время, которое может быть либо непрерывным $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, либо дискретным $t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ соответствует вектору состояния размерности n ; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ – вектору входа (управления) размерности r ; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ – вектору выхода (измерения) размерности m . Оператор σ обозначает либо дифференцирование по времени для непрерывной системы, т.е. $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$, либо операцию сдвига во времени для дискретной системы, т.е. $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$. Множество \mathbb{R} обозначает действительные числа (вещественную ось), а \mathbb{R}^k – соответственно вещественное пространство размерности k .

Считается, что собственные значения $\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0\}$ обязательно включает такие комплексные числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$, что их действительные части $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$, или их модуль $|\lambda_i| > 1$ для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$. Здесь \mathbf{I}_n – единичная матрица порядка n ; $|\lambda_i|$ – модуль собственного значения λ_i ; \mathbb{C} – множество комплексных чисел (комплексная плоскость).

Введем понятие множества \mathbb{C}^{stab} , которое в зависимости от типа динамической системы (непрерывной или дискретной) обозначает соответственно левую полуплоскость \mathbb{C}^- , т.е. $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}^-$, либо область внутри круга единичного радиуса с центром в начале \mathbb{C} , т.е. $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda| < 1}$. При этом $\text{eig}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}^{\text{stab}}$ – условие асимптотической устойчивости, выраженное в терминах собственных значений (полюсов) матрицы.

Предполагается, что для ММО-системы (1) существует управление с отрицательной обратной связью вида

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – матрица коэффициентов (матрица регулятора).

Пусть \mathbf{B}^\perp – матричный делитель нуля, удовлетворяющий следующим условиям: $\mathbf{B}^\perp \mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r) \times r}$, $\mathbf{B}^\perp \mathbf{B}^{\perp T} = \mathbf{I}_{n-r}$, где \mathbf{B}^+ – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза; $\mathbf{0}_{r \times r}$ – нулевая матрица размера $r \times r$.

Введем в рассмотрение следующую многоуровневую декомпозицию динамической системы (1) с матрицами $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$.

Нулевой (исходный) уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad (3)$$

Первый уровень

$$A_i = B^\perp A B^{\perp T}, B_i = B^\perp A B, \quad (4)$$

к-й (промежуточный) уровень

$$A_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1}^{\perp T}, B_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1}, \quad (5)$$

L-й (конечный) уровень, $L = \text{ceil}(n/r) - 1$,

$$A_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}^{\perp T}, B_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}, \quad (6)$$

Здесь $\text{ceil}(\ast)$ – операция округления числа \ast в сторону большего значения, например, $\text{ceil}(0.3) = 1$, $\text{ceil}(1.1) = 2$, $\text{ceil}(2.01) = 3$ и т.д.

Если МИМО-система (1) с парой матриц (A, B) полностью управляема, то полностью управляемы и все системы с матриц (A_i, B_i) (4) – (5).

Пусть МИМО-система (1) полностью управляемая и все матрицы B_i имеют полные ранги по строкам, а матрица $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ удовлетворяет формулам «сборки»

$$K = K_0 = B_0^- A - \Phi_0 B_0^-, \quad B_0^- = B_0^+ + K_1 B_0^\perp, \quad (7)$$

$$K_1 = B_1^- A_1 - \Phi_1 B_1^-, \quad B_1^- = B_1^+ + K_2 B_1^\perp, \dots \quad (8)$$

$$K_k = B_k^- A_k - \Phi_k B_k^-, \quad B_k^- = B_k^+ + K_{k+1} B_k^\perp, \dots \quad (9)$$

$$K_L = B_L^- A_L - \Phi_L B_L^-, \quad (10)$$

тогда справедливым оказывается равенство

$$\text{eig}(A - BK) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1}). \quad (11)$$

Ограничение в виде полноты ранга матриц B_i вступает в противоречие с наличием функциональной избыточности СУ, поэтому в диссертации разработан алгоритм, позволяющий устранить это ограничение. Он включает следующие шаги:

- 1) проверить ранг матрицы B ;
- 2) если $\text{rank } B < r$, то выполнить скелетное разложение $B = \widehat{B}T$;
- 3) назначить матрицы $A_0 = A$, $B_0 = \widehat{B}$;
- 4) вычислить $L = \text{ceil}(n/r) - 1$;
- 5) задать матрицы $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_L$, такие, что $\bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1})$ – желаемое множество собственных значений замкнутой системы;

- 6) рассчитать делитель нуля B_0^\perp , а затем матрицы

$$A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{\perp+}, B_1 = B_0^\perp A_0 B_0, \dots, A_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1}^{\perp+}, B_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1};$$

- 7) вычислить делитель нуля B_k^\perp , а затем матрицы

$$A_{k+1} = B_k^\perp A_k B_k^{\perp+}, B_{k+1} = B_k^\perp A_k B_k, \dots;$$

- 8) определить делитель нуля B_{L-2}^\perp , а затем матрицы

$$A_{L-1} = B_{L-2}^\perp A_{L-2} B_{L-2}^{\perp+}, B_{L-1} = B_{L-2}^\perp A_{L-2} B_{L-2};$$

- 9) рассчитать делитель нуля B_{L-1}^\perp , а затем матрицы

$$A_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}^{\perp+}, B_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1};$$

- 10) последовательно вычислить матрицы

$$K_L = B_L^- A_L - \Phi_L B_L^-,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{L-1}^- &= \mathbf{K}_L \mathbf{B}_{L-1}^\perp + \mathbf{B}_{L-1}^+, \quad \mathbf{K}_{L-1} = \mathbf{B}_{L-1}^- \mathbf{A}_{L-1} - \Phi_{L-1} \mathbf{B}_{L-1}^-, \dots, \\
\mathbf{B}_k^- &= \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k^\perp + \mathbf{B}_k^+, \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^- \mathbf{A}_k - \Phi_k \mathbf{B}_k^-, \dots, \\
\mathbf{B}_1^- &= \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp + \mathbf{B}_1^+, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-, \\
\mathbf{B}_0^- &= \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp + \mathbf{B}_0^+, \quad \mathbf{K} = \mathbf{T}^+ \mathbf{K}_0 = \mathbf{T}^+ (\mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 - \Phi_0 \mathbf{B}_0^-).
\end{aligned}$$

Полученный регулятор

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^+ \mathbf{K}_0 = \mathbf{T}^+ (\mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 - \Phi_0 \mathbf{B}_0^-), \quad \mathbf{B}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp + \mathbf{B}_0^+ \quad (12)$$

обеспечивает выполнение условия (11), т.е. условия заданного размещения полюсов.

На основе анализа соотношений рассмотренного в данном разделе декомпозиционно-го метода размещения полюсов определены источники возникновения множества эквивалентных ЗУ ВС. Здесь можно выделить три источника множества эквивалентных законов управления, т.е. множества матриц регулятора $\mathbf{K}_{\{i\}}$, для которых выполняется равенство

$$\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{\{i\}}) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1}). \quad (13)$$

1. Из основных положений приведенного выше метода и построенного на его основе алгоритма размещения полюсов следует, что, в общем случае никаких ограничений на матрицы Φ_{i-1} не накладывается за исключением соответствия их множеств собственных значений заданным.

2. Следующим источником формирования множества эквивалентных законов $\mathbf{K}_{\{i\}}$ является потеря полного ранга по столбцам матриц \mathbf{B}_i в процедуре декомпозиции (3) – (6).

Рассмотрим «скелетное» разложение $\mathbf{B}_i = \widehat{\mathbf{B}}_i \mathbf{T}_i$ в случае потери ранга по столбцам матрицы \mathbf{B}_i . При этом выполняется равенство множеств собственных значений

$$\text{eig}(\mathbf{A}_i - \widehat{\mathbf{B}}_i \widehat{\mathbf{K}}_i) = \text{eig}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{T}_i^+ \widehat{\mathbf{K}}_i),$$

где $\mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^+ = \mathbf{I}$. Если согласно формуле (12) к матрице $\mathbf{T}_i^+ \widehat{\mathbf{K}}_i$ добавить слагаемое, образованное делителем нуля, $\mathbf{B}_{iR}^\perp \varpi_i$, где \mathbf{B}_{iR}^\perp – правый делитель нуля матрицы \mathbf{B}_i , т.е. $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_{iR}^\perp = 0$, ϖ_i – матрица подходящих размеров с произвольными элементами, то будет выполняться равенство

$$\text{eig}(\mathbf{A}_i - \widehat{\mathbf{B}}_i \widehat{\mathbf{K}}_i) = \text{eig}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i (\mathbf{T}_i^+ \widehat{\mathbf{K}}_i + \mathbf{B}_{iR}^\perp \varpi_i)). \quad (14)$$

Таким образом, аддитивная добавка к регуляторам $\widehat{\mathbf{K}}_i$, получаемым на каждом уровне декомпозиции математической модели ММО-системы (1), порождает собственное подмножество множества эквивалентных законов управления.

3. Наконец, третьим источником, порождающим эквивалентные законы, является неполнота ранга по столбцам матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ модели (1). Этот источник с формальной точки зрения подпадает под только что приведенные рассуждения относительно «скелетного» разложения $\mathbf{B}_i = \widehat{\mathbf{B}}_i \mathbf{T}_i$. Однако, он вынесен его в отдельную категорию вследствие того, что только добавка $\mathbf{B}_{0R}^\perp \varpi_i = \mathbf{B}_R^\perp \varpi_i$ (на нулевом уровне декомпозиции) является аддитивной, а все остальные в силу процедуры «сборки» регулятора (7) – (10) можно считать мультипликативными.

Также во втором разделе приведены методические примеры синтеза и оценка вычислительных затрат декомпозиционного метода размещения полюсов. Кроме того, для линеаризованных моделей изолированного продольного и бокового движения ВС с помощью

рассмотренного декомпозиционного метода размещения полюсов получены аналитические (символьные) выражения стабилизирующих законов управления, обеспечивающих заданное размещение полюсов. Результаты математического моделирования управления продольным и боковым движением гипотетических ВС с использованием аналитических законов управления показали их большие возможности по обеспечению заданных требований по устойчивости и управляемости ВС.

В третьем разделе на основе модифицированного метода размещения полюсов формулируется и решается прикладная задача реконфигурации СУ при непрогнозируемых отказах исполнительной подсистемы.

Рассматриваемый в диссертации среднемагистральный пассажирский самолет выполнен по нормальной схеме. Стреловидное крыло – низко расположенное и механизированное (предкрылки и однощелевые закрылки). Вертикальное оперение – однокилевое, горизонтальное оперение расположено на хвостовой части фюзеляжа. Аэродинамическими органами управления по тангажу являются управляемый стабилизатор (балансировка) и рули высоты, по крену – элероны, по рысканию – руль направления.

Для определенности при решении задач реконфигурации СУ в работе используется непрерывная линейная модель движения воздушного судна, т.е. $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$. Эта модель получена на основе линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений движения ВС, рассматриваемого как абсолютно жесткое тело, симметричное относительно вертикальной плоскости ОХУ связанной системы координат. Вектор состояния модели ВС в форме (1) имеет вид

$$\mathbf{x} = (V \quad \alpha \quad \Theta \quad \omega_z \quad \beta \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \gamma)^T \in \mathbb{R}^8, n = 8,$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости крена, рыскания и тангажа, соответственно; $\alpha, \Theta, \gamma, \beta$ – углы атаки, наклона траектории, крена и скольжения, соответственно; V – скорость полета. Вектор управления модели ВС в форме (1) равен

$$\mathbf{u} = (\delta_B^n \quad \delta_B^n \quad \delta_n \quad \delta_3^n \quad \delta_3^n)^T \in \mathbb{R}^5, r = 5,$$

где δ_B^n, δ_B^n – углы отклонения левого и правого руля высоты, соответственно, с диапазонами отклонения ($-27^\circ \dots 22^\circ$); φ – угол отклонения стабилизатора с диапазоном отклонения ($-12^\circ \dots 2^\circ$); δ_n – угол отклонения руля направления ($-27^\circ \dots 27^\circ$); δ_3^n, δ_3^n – углы отклонения левого и правого элерона, соответственно, с диапазонами отклонения ($-27^\circ \dots 15^\circ$).

С использованием методики разделения движения на возмущенное и невозмущенное матричное представление продольного и бокового движения ВС имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{87} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{25} & b_{26} \\ -b_{21} & -b_{22} & 0 & -b_{25} & -b_{26} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{45} & b_{46} \\ \hline 0 & 0 & b_{54} & 0 & 0 \\ b_{61} & -b_{62} & b_{64} & b_{65} & -b_{66} \\ b_{71} & -b_{72} & b_{74} & b_{75} & -b_{76} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Как видно из структуры матрицы эффективности управления B , рассматриваемая модель ВС учитывает перекрестные связи между каналами (органами) управления ВС для продольного и бокового движения.

Поскольку при изменении режима полета ВС изменяются аэродинамические коэффициенты a_{ij} и b_{ij} , то предполагается, что отказы и повреждения в исполнительной подсистеме СУ ВС также приводят к изменению коэффициентов b_{ij} , а при полной потере управляемости вплоть до нулевых значений. Наихудшие случаи отказов в канале руля высоты и в канале элеронов исполнительной подсистемы СУ связывается с полным нарушением взаимной «симметрии» коэффициентов в матрице B , при которой выполняются неравенства $b_{i1} \neq b_{i2}$, $b_{i5} \neq b_{i6}$, $i \in \{2, 4, 6, 7\}$.

В диссертации показано, что задача реконфигурации пилотажного контура СУ может быть решена в аналитическом виде, т.е. без числовых ошибок. Рассмотрено два подхода к решению этой задачи.

1. Анализируются источники, порождающие множество эквивалентных законов управления (ЗУ) $K_{\{\cdot\}}$, а именно, 1) свобода в выборе (задании) матриц Φ_{i-1} в (7) – (10); 2) неполнота ранга по столбцам матриц B_i в процедуре декомпозиции (3) – (6); 3) неполнота ранга по столбцам матрицы $B = B_0$ исходной модели МИМО-системы (1). В последнем случае в ЗУ присутствует в явном виде аддитивная составляющая вида $B_R^\perp \varpi$.

Для вывода расчетных соотношений аналитической реконфигурации СУ ВС считается, что штатный объект и объект с отказом исполнительной подсистемы СУ представлены соответствующими линейными МИМО-системами типа (1):

$$\begin{aligned} \sigma x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = x(t), \quad C = I_n, \\ \sigma x_{\text{отк}}(t) &= Ax_{\text{отк}}(t) + B_{\text{отк}} u_{\text{отк}}(t), \quad y_{\text{отк}}(t) = x_{\text{отк}}(t), \quad C_{\text{отк}} = I_n. \end{aligned}$$

Таким образом, отказ исполнительной подсистемы СУ ВС моделируется матрицей $B_{\text{отк}}$. При этом наблюдаются все переменные состояний штатного и отказавшего объектов. Также считается, что у матрицы B ранг по столбцам может быть равен или меньше количества столбцов r , который, в свою очередь, не превышает размерности пространства состояний, т.е. $\text{rank } B \leq r < n$.

Законы управления СУ штатного объекта и СУ объекта с реконфигурацией соответствуют следующим уравнениям, соответственно, $u(t) = -Kx(t)$, $u_{\text{отк}}(t) = -K_{\text{рек}} x_{\text{отк}}(t)$, где $K_{\text{рек}}$ – матрица реконфигурированного ЗУ (реконфигурированного регулятора).

Считается, что матрица регулятора в ЗУ исправной СУ имеет вид (7)

$$K = B_0^- A - \Phi B_0^- + B_R^\perp \varpi, \quad B_0^- = B_0^+ + K_1 B_0^\perp,$$

а матрица реконфигурированного регулятора – $K_{\text{рек}} \in K_{\{\cdot\}}$. Тогда задача реконфигурации будет состоять в обеспечении равенства множеств собственных значений

$$\text{eig}(A - B_{\text{отк}} K_{\{\cdot\}}) = \text{eig}(A - BK),$$

где $K_{\text{рек}} = K_{\{\cdot\}}$ – подходящий элемент аналитического множества законов управления $K_{\{\cdot\}}$, обеспечивающий заданное размещение полюсов. При этом также выполняется условие принадлежности рассматриваемому множеству регулятора исправной СУ, т.е.

$$\left. \begin{aligned} K &= B_0^- A - \Phi B_0^- + B_R^\perp \varpi \\ B_0^- &= B_0^+ + K_1 B_0^\perp \end{aligned} \right\} \in K_{\{\cdot\}}.$$

2. Другим подходом к решению задачи реконфигурации СУ, который рассматривается в диссертации, является аналитический синтез множества ЗУ $K_{\{\cdot\}}$ для «наихудшего» (в некотором смысле) случая отказа исполнительной подсистемы. При этом штатный ЗУ (закон

при нормальном функционировании), как и все другие в меньшей степени опасные для безопасности полета ВС отказы, будут являться элементами этого множества ЗУ. На примере среднемагистрального пассажирского самолета это выглядит следующим образом.

Для определенности обозначим множество заданных полюсов следующим образом:

$$\text{eig}(A - BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8\} \subset \mathbb{C}^{\text{stab}}. \quad (16)$$

Здесь λ_i – заданные полюса. Никаких дополнительных ограничений по значению и кратности на элементы данного множества не накладывается. В принципе, все элементы (16) могут совпадать, т.е. иметь алгебраическую кратность равную размерности пространства состояний динамической системы: $\text{eig}(A - BK) = \{\lambda, \lambda, \dots, \lambda\} \subset \mathbb{C}^{\text{stab}}$.

В соответствии с приведенным выше алгоритмом выполним следующие действия:

- 1) Проверим ранг матрицы B . В данном случае он равен 5 и совпадает с размерностью вектора управления $r = 5$.
- 2) Поскольку $\text{rank } B = r$, то выполнить скелетное разложение $B = \widehat{B}T$ нет необходимости.
- 3) Назначим матрицы нулевого уровня $A_0 = A$ и $B_0 = B$ (15).
- 4) Вычислим $L = \text{ceil}(n/r) - 1 = \text{ceil}(8/5) - 1 = 1$. Таким образом, в данном случае требуется рассмотреть только 2 уровня декомпозиции: нулевой и первый.
- 5) Поскольку размерность вектора управления равна $r = 5$, то для первого и нулевого уровней можно задать, например, следующие диагональные матрицы:

$$\Phi_1 = \text{diag } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Phi_0 = \text{diag } \lambda_4, \dots, \lambda_8, \quad (17)$$

характеризующие желаемое множество собственных значений замкнутой системы, считая их для простоты действительными числами. Диагональная форма матриц (17), позволяет получать ЗУ с малыми нормами матриц регуляторов. Минимальная норма достигается при совпадении всех полюсов λ_i . Для формирования комплексно-сопряженных полюсов можно воспользоваться представлением комплексных чисел, например, в следующей форме:

$$\Phi_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} -r_1 & \omega_1 & 0 & \\ \hline -\omega_1 & -r_1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 & \end{array} \right), \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -r_1 \pm \omega_1.$$

- 6) Рассчитаем делитель нуля B_0^\perp , а затем матрицы $A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{+\perp}$, $B_1 = B_0^\perp A_0 B_0$. Получим

$$B_0^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{+\perp} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = B_0^\perp A_0 B_0 = \begin{pmatrix} b_{21}(a_{12} - a_{13}) & b_{22}(a_{12} - a_{13}) & 0 & b_{25}(a_{12} - a_{13}) & b_{26}(a_{12} - a_{13}) \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{45} & b_{46} \\ b_{61} + a_{87}b_{71} & -b_{62} - a_{87}b_{72} & b_{64} + a_{87}b_{74} & b_{65} + a_{87}b_{75} & -b_{65} - a_{87}b_{76} \end{pmatrix}.$$

- 7) Вычислим псевдообратную матрицу B_1^+ вида

$$\mathbf{B}_1^+ = \begin{pmatrix} \widehat{b}_{1,11}^+ & \widehat{b}_{1,21}^+ & \widehat{b}_{1,31}^+ & \widehat{b}_{1,41}^+ & \widehat{b}_{1,51}^+ \\ \widehat{b}_{1,12}^+ & \widehat{b}_{1,22}^+ & \widehat{b}_{1,32}^+ & \widehat{b}_{1,42}^+ & \widehat{b}_{1,52}^+ \\ \widehat{b}_{1,13}^+ & \widehat{b}_{1,23}^+ & \widehat{b}_{1,33}^+ & \widehat{b}_{1,43}^+ & \widehat{b}_{1,53}^+ \end{pmatrix}^T,$$

элементы которой в силу громоздкости в данном случае не приводятся.

На основе полученных матриц определим матрицу $\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^+$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,11}^+ & (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,11}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,12}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{1,13}^+ \\ (a_{21} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,21}^+ & (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,21}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,22}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{1,23}^+ \\ (a_{31} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,31}^+ & (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,31}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,32}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{1,33}^+ \\ (a_{41} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,41}^+ & (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,41}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,42}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{1,43}^+ \\ (a_{51} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,51}^+ & (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,51}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,52}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{1,53}^+ \end{pmatrix}. \quad (18)$$

8) Псевдообратную матрицу нулевого уровня в силу относительной громоздкости запишем, не раскрывая значения элементов,

$$\mathbf{B}_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{b}_{0,12}^+ & \widehat{b}_{0,13}^+ & \widehat{b}_{0,14}^+ & \widehat{b}_{0,15}^+ & \widehat{b}_{0,16}^+ & \widehat{b}_{0,17}^+ & 0 \\ 0 & \widehat{b}_{0,22}^+ & \widehat{b}_{0,23}^+ & \widehat{b}_{0,24}^+ & \widehat{b}_{0,25}^+ & \widehat{b}_{0,26}^+ & \widehat{b}_{0,27}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{54}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{b}_{0,42}^+ & \widehat{b}_{0,43}^+ & \widehat{b}_{0,44}^+ & \widehat{b}_{0,45}^+ & \widehat{b}_{0,46}^+ & \widehat{b}_{0,47}^+ & 0 \\ 0 & \widehat{b}_{0,52}^+ & \widehat{b}_{0,53}^+ & \widehat{b}_{0,54}^+ & \widehat{b}_{0,55}^+ & \widehat{b}_{0,56}^+ & \widehat{b}_{0,57}^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

При этом полуобратная матрица $\mathbf{B}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_0^+$ будет равна

$$\mathbf{B}_0^- = \begin{pmatrix} \widehat{b}_{0,11}^+ (a_{11} - \lambda_1) & \widehat{b}_{0,12}^- & \widehat{b}_{0,13}^- & \widehat{b}_{0,14}^+ & \widehat{b}_{0,15}^+ & \widehat{b}_{0,16}^+ & \widehat{b}_{0,17}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{0,13}^+ \\ \widehat{b}_{0,21}^+ (a_{11} - \lambda_1) & \widehat{b}_{0,22}^- & \widehat{b}_{0,23}^- & \widehat{b}_{0,24}^+ & \widehat{b}_{0,25}^+ & \widehat{b}_{0,26}^+ & \widehat{b}_{0,27}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{0,23}^+ \\ \widehat{b}_{0,31}^+ (a_{11} - \lambda_1) & \widehat{b}_{0,32}^- & \widehat{b}_{0,33}^- & 0 & b_{54}^{-1} & 0 & 0 & -\lambda_3 \widehat{b}_{0,33}^+ \\ \widehat{b}_{0,41}^+ (a_{11} - \lambda_1) & \widehat{b}_{0,42}^- & \widehat{b}_{0,43}^- & \widehat{b}_{0,44}^+ & \widehat{b}_{0,45}^+ & \widehat{b}_{0,46}^+ & \widehat{b}_{0,47}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{0,43}^+ \\ \widehat{b}_{0,51}^+ (a_{11} - \lambda_1) & \widehat{b}_{0,52}^- & \widehat{b}_{0,53}^- & \widehat{b}_{0,54}^+ & \widehat{b}_{0,55}^+ & \widehat{b}_{0,56}^+ & \widehat{b}_{0,57}^+ & -\lambda_3 \widehat{b}_{0,53}^+ \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{0,12}^- &= \widehat{b}_{0,12}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,12}^+ + \widehat{b}_{0,11}^+ (a_{12} + a_{13}), & \widehat{b}_{0,13}^- &= \widehat{b}_{0,13}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,12}^+ + \widehat{b}_{0,11}^+ (a_{12} + a_{13}), \\ \widehat{b}_{0,22}^- &= \widehat{b}_{0,22}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,22}^+ + \widehat{b}_{0,21}^+ (a_{12} + a_{13}), & \widehat{b}_{0,23}^- &= \widehat{b}_{0,23}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,22}^+ + \widehat{b}_{0,21}^+ (a_{12} + a_{13}), \\ \widehat{b}_{0,32}^- &= \widehat{b}_{0,31}^+ (a_{12} + a_{13}) - \lambda_2 \widehat{b}_{0,32}^+, & \widehat{b}_{0,33}^- &= \widehat{b}_{0,31}^+ (a_{12} + a_{13}) - \lambda_2 \widehat{b}_{0,32}^+, \\ \widehat{b}_{0,42}^- &= \widehat{b}_{0,42}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,42}^+ + \widehat{b}_{0,41}^+ (a_{12} + a_{13}), & \widehat{b}_{0,43}^- &= \widehat{b}_{0,43}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,42}^+ + \widehat{b}_{0,41}^+ (a_{12} + a_{13}), \\ \widehat{b}_{0,52}^- &= \widehat{b}_{0,52}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,52}^+ + \widehat{b}_{0,51}^+ (a_{12} + a_{13}), & \widehat{b}_{0,53}^- &= \widehat{b}_{0,53}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{0,52}^+ + \widehat{b}_{0,51}^+ (a_{12} + a_{13}). \end{aligned}$$

9) Окончательно, регулятор в законе управления (2) СУ с отказавшей исполнительной подсистемой будет иметь вид

$$\mathbf{K}_{\text{рек}} = \begin{pmatrix} \widehat{k}_{0,11} & \widehat{k}_{0,12} & \widehat{k}_{0,13} & \widehat{k}_{0,14} & \widehat{k}_{0,15} & \widehat{k}_{0,16} & \widehat{k}_{0,17} & \widehat{k}_{0,18} \\ \widehat{k}_{0,21} & \widehat{k}_{0,22} & \widehat{k}_{0,23} & \widehat{k}_{0,24} & \widehat{k}_{0,25} & \widehat{k}_{0,26} & \widehat{k}_{0,27} & \widehat{k}_{0,28} \\ \widehat{k}_{0,31} & \widehat{k}_{0,32} & \widehat{k}_{0,33} & \widehat{k}_{0,24} & \widehat{k}_{0,25} & \widehat{k}_{0,36} & \widehat{k}_{0,37} & \widehat{k}_{0,38} \\ \widehat{k}_{0,41} & \widehat{k}_{0,42} & \widehat{k}_{0,43} & \widehat{k}_{0,24} & \widehat{k}_{0,25} & \widehat{k}_{0,46} & \widehat{k}_{0,47} & \widehat{k}_{0,48} \\ \widehat{k}_{0,51} & \widehat{k}_{0,52} & \widehat{k}_{0,53} & \widehat{k}_{0,24} & \widehat{k}_{0,25} & \widehat{k}_{0,56} & \widehat{k}_{0,57} & \widehat{k}_{0,58} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \widehat{k}_{0,11} &= (\widehat{b}_{0,12}^+ - \widehat{b}_{0,13}^+) a_{21} + \widehat{b}_{0,14}^+ a_{41} + (a_{11}^2 - a_{11} \lambda_1 - a_{11} \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_4) \widehat{b}_{1,11}^+, \\ \widehat{k}_{0,12} &= (\widehat{b}_{0,12}^+ - \widehat{b}_{0,13}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,14}^+ a_{42} - \widehat{b}_{0,12}^+ \lambda_4 + (a_{11} a_{12} - a_{12} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_4) \widehat{b}_{1,11}^+ + \lambda_1 \lambda_4 \widehat{b}_{1,12}^+, \\ \widehat{k}_{0,13} &= (\widehat{b}_{0,12}^+ - \widehat{b}_{0,13}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,14}^+ a_{43} - \widehat{b}_{0,13}^+ \lambda_4 + (a_{11} a_{13} - a_{13} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_4) \widehat{b}_{1,11}^+ + \lambda_1 \lambda_4 \widehat{b}_{1,12}^+, \\ \widehat{k}_{0,14} &= \widehat{b}_{0,12}^+ + \widehat{b}_{0,14}^+ a_{44} + \lambda_4 \widehat{b}_{0,14}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,12}^+ + (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,11}^+, \\ \widehat{k}_{0,15} &= \widehat{b}_{0,15}^+ a_{55} + a_{65} \widehat{b}_{0,16}^+ + a_{75} \widehat{b}_{0,17}^+ - \lambda_4 \widehat{b}_{0,15}^+, \quad \widehat{k}_{0,16} = \widehat{b}_{0,15}^+ a_{56} + a_{66} \widehat{b}_{0,16}^+ + a_{76} \widehat{b}_{0,17}^+ - \lambda_4 \widehat{b}_{0,16}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,13}^+, \\ \widehat{k}_{0,17} &= \widehat{b}_{0,15}^+ a_{57} + a_{67} \widehat{b}_{0,16}^+ + a_{77} \widehat{b}_{0,17}^+ - \lambda_4 \widehat{b}_{0,17}^+ - \lambda_3 a_{87} \widehat{b}_{1,13}^+, \quad \widehat{k}_{0,18} = \widehat{b}_{0,15}^+ a_{58} + \lambda_3 \lambda_4 \widehat{b}_{1,13}^+, \\ \widehat{k}_{0,21} &= (\widehat{b}_{0,22}^+ - \widehat{b}_{0,23}^+) a_{21} + \widehat{b}_{0,24}^+ a_{41} + (a_{11}^2 - a_{11} \lambda_1 - a_{11} \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_5) \widehat{b}_{1,21}^+, \\ \widehat{k}_{0,22} &= (\widehat{b}_{0,22}^+ - \widehat{b}_{0,23}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,24}^+ a_{42} - \widehat{b}_{0,22}^+ \lambda_5 + (a_{11} a_{12} - a_{12} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_5) \widehat{b}_{1,11}^+ + \lambda_2 \lambda_5 \widehat{b}_{1,22}^+, \\ \widehat{k}_{0,23} &= (\widehat{b}_{0,22}^+ - \widehat{b}_{0,23}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,24}^+ a_{43} - \widehat{b}_{0,23}^+ \lambda_5 + (a_{11} a_{13} - a_{13} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_5) \widehat{b}_{1,11}^+ + \lambda_1 \lambda_5 \widehat{b}_{1,22}^+, \\ \widehat{k}_{0,24} &= \widehat{b}_{0,22}^+ + \widehat{b}_{0,24}^+ a_{44} + \lambda_5 \widehat{b}_{0,24}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,22}^+ + (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,21}^+, \\ \widehat{k}_{0,25} &= \widehat{b}_{0,25}^+ a_{55} + a_{65} \widehat{b}_{0,26}^+ + a_{75} \widehat{b}_{0,27}^+ - \lambda_5 \widehat{b}_{0,25}^+, \quad \widehat{k}_{0,26} = \widehat{b}_{0,25}^+ a_{56} + a_{66} \widehat{b}_{0,26}^+ + a_{76} \widehat{b}_{0,27}^+ - \lambda_5 \widehat{b}_{0,26}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,23}^+, \\ \widehat{k}_{0,27} &= \widehat{b}_{0,25}^+ a_{57} + a_{67} \widehat{b}_{0,26}^+ + a_{77} \widehat{b}_{0,27}^+ - \lambda_5 \widehat{b}_{0,27}^+ - \lambda_3 a_{87} \widehat{b}_{1,23}^+, \quad \widehat{k}_{0,28} = \widehat{b}_{0,25}^+ a_{58} + \lambda_3 \lambda_5 \widehat{b}_{1,23}^+, \\ \widehat{k}_{0,31} &= (a_{11} - \lambda_1)(a_{11} - \lambda_6) \widehat{b}_{1,23}^+, \quad \widehat{k}_{0,32} = \lambda_6 (\lambda_2 \widehat{b}_{1,32}^+ - (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,31}^+) + a_{12} (a_{11} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,31}^+, \\ \widehat{k}_{0,33} &= \lambda_6 (\lambda_2 \widehat{b}_{1,32}^+ - (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,31}^+) + a_{13} (a_{11} - \lambda_1) \widehat{b}_{1,31}^+, \quad \widehat{k}_{0,34} = (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,31}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,32}^+, \\ \widehat{k}_{0,35} &= (a_{55} - \lambda_6) / \widehat{b}_{1,54}^+, \quad \widehat{k}_{0,36} = a_{56} / \widehat{b}_{1,54}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,33}^+, \quad \widehat{k}_{0,37} = a_{57} / \widehat{b}_{1,54}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,33}^+, \quad \widehat{k}_{0,38} = a_{58} / \widehat{b}_{1,54}^+ - \lambda_3 \lambda_6 \widehat{b}_{1,33}^+, \\ \widehat{k}_{0,41} &= (\widehat{b}_{0,42}^+ - \widehat{b}_{0,43}^+) a_{21} + \widehat{b}_{0,44}^+ a_{41} + (a_{11}^2 - a_{11} \lambda_1 - a_{11} \lambda_7 - \lambda_1 \lambda_7) \widehat{b}_{1,41}^+, \\ \widehat{k}_{0,42} &= (\widehat{b}_{0,42}^+ - \widehat{b}_{0,43}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,44}^+ a_{42} - \widehat{b}_{0,42}^+ \lambda_7 + (a_{11} a_{12} - a_{12} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_7) \widehat{b}_{1,41}^+ + \lambda_2 \lambda_7 \widehat{b}_{1,42}^+, \\ \widehat{k}_{0,43} &= (\widehat{b}_{0,42}^+ - \widehat{b}_{0,43}^+) a_{23} + \widehat{b}_{0,44}^+ a_{43} - \widehat{b}_{0,43}^+ \lambda_7 + (a_{11} a_{13} - a_{13} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_7) \widehat{b}_{1,41}^+ + \lambda_2 \lambda_7 \widehat{b}_{1,42}^+, \\ \widehat{k}_{0,44} &= \widehat{b}_{0,42}^+ + \widehat{b}_{0,44}^+ a_{44} + \lambda_7 \widehat{b}_{0,44}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,42}^+ + (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,41}^+, \quad \widehat{k}_{0,45} = \widehat{b}_{0,45}^+ a_{55} + a_{65} \widehat{b}_{0,46}^+ + a_{75} \widehat{b}_{0,47}^+ - \lambda_7 \widehat{b}_{0,45}^+, \\ \widehat{k}_{0,46} &= \widehat{b}_{0,45}^+ a_{56} + a_{66} \widehat{b}_{0,46}^+ + a_{76} \widehat{b}_{0,47}^+ - \lambda_7 \widehat{b}_{0,46}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,43}^+, \quad \widehat{k}_{0,47} = \widehat{b}_{0,45}^+ a_{57} + a_{67} \widehat{b}_{0,46}^+ + a_{77} \widehat{b}_{0,47}^+ - \lambda_7 \widehat{b}_{0,47}^+ - \lambda_3 a_{87} \widehat{b}_{1,43}^+, \\ \widehat{k}_{0,48} &= \widehat{b}_{0,45}^+ a_{58} + \lambda_3 \lambda_7 \widehat{b}_{1,43}^+, \quad \widehat{k}_{0,51} = (\widehat{b}_{0,52}^+ - \widehat{b}_{0,53}^+) a_{21} + \widehat{b}_{0,54}^+ a_{41} + (a_{11}^2 - a_{11} \lambda_1 - a_{11} \lambda_8 - \lambda_1 \lambda_8) \widehat{b}_{1,51}^+, \\ \widehat{k}_{0,52} &= (\widehat{b}_{0,52}^+ - \widehat{b}_{0,53}^+) a_{22} + \widehat{b}_{0,54}^+ a_{42} - \widehat{b}_{0,52}^+ \lambda_8 + (a_{11} a_{12} - a_{12} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_8) \widehat{b}_{1,51}^+ + \lambda_2 \lambda_8 \widehat{b}_{1,52}^+, \\ \widehat{k}_{0,43} &= (\widehat{b}_{0,52}^+ - \widehat{b}_{0,53}^+) a_{23} + \widehat{b}_{0,54}^+ a_{43} - \widehat{b}_{0,53}^+ \lambda_8 + (a_{11} a_{13} - a_{13} \lambda_1 - (a_{12} + a_{13}) \lambda_8) \widehat{b}_{1,51}^+ + \lambda_2 \lambda_8 \widehat{b}_{1,52}^+, \\ \widehat{k}_{0,54} &= \widehat{b}_{0,52}^+ + \widehat{b}_{0,54}^+ a_{44} - \lambda_8 \widehat{b}_{0,54}^+ - \lambda_2 \widehat{b}_{1,52}^+ + (a_{12} + a_{13}) \widehat{b}_{1,51}^+, \quad \widehat{k}_{0,55} = \widehat{b}_{0,55}^+ a_{55} + a_{65} \widehat{b}_{0,56}^+ + a_{75} \widehat{b}_{0,57}^+ - \lambda_8 \widehat{b}_{0,55}^+, \\ \widehat{k}_{0,56} &= \widehat{b}_{0,55}^+ a_{56} + a_{66} \widehat{b}_{0,56}^+ + a_{76} \widehat{b}_{0,57}^+ - \lambda_8 \widehat{b}_{0,56}^+ - \lambda_3 \widehat{b}_{1,53}^+, \quad \widehat{k}_{0,57} = \widehat{b}_{0,55}^+ a_{57} + a_{67} \widehat{b}_{0,56}^+ + a_{77} \widehat{b}_{0,57}^+ - \lambda_8 \widehat{b}_{0,57}^+ - \lambda_3 a_{87} \widehat{b}_{1,53}^+, \\ \widehat{k}_{0,58} &= \widehat{b}_{0,55}^+ a_{58} + \lambda_3 \lambda_8 \widehat{b}_{1,53}^+. \end{aligned}$$

В диссертации показано, что ЗУ исправной СУ является частным случаем ЗУ (21). Матрица B_1 на первом уровне декомпозиции имеет правый делитель нуля

$$B_{1R}^\perp = \begin{pmatrix} b_{1,11R}^\perp & b_{1,21R}^\perp & b_{1,31R}^\perp & 1 & 0 \\ b_{1,21R}^\perp & b_{1,22R}^\perp & b_{1,32R}^\perp & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

где для краткости записи введены обозначения

$$b_{1,11R}^\perp = \frac{b_{22}b_{45} - b_{25}b_{42}}{b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41}}, \quad b_{1,12R}^\perp = \frac{b_{22}b_{46} - b_{26}b_{42}}{b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41}}, \quad b_{1,21R}^\perp = -\frac{b_{21}b_{45} - b_{25}b_{41}}{b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41}}, \quad b_{1,22R}^\perp = -\frac{b_{21}b_{46} - b_{26}b_{41}}{b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41}},$$

$$b_{1,31R}^\perp = -(b_{21}b_{42}b_{65} + b_{21}b_{42}b_{62} - b_{22}b_{41}b_{65} + b_{22}b_{45}b_{61} - b_{25}b_{41}b_{62} - b_{25}b_{42}b_{61} + \\ + a_{87}b_{21}b_{42}b_{75} + a_{87}b_{21}b_{45}b_{72} - a_{87}b_{22}b_{41}b_{75} + a_{87}b_{22}b_{45}b_{71} - a_{87}b_{25}b_{41}b_{72} - \\ - a_{87}b_{25}b_{42}b_{71})(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})^{-1}(b_{64} + a_{87}b_{74})^{-1},$$

$$b_{1,32R}^\perp = (b_{21}b_{42}b_{66} + b_{21}b_{46}b_{62} - b_{22}b_{41}b_{66} + b_{22}b_{46}b_{61} - b_{26}b_{41}b_{62} - b_{26}b_{42}b_{61} + \\ + a_{87}b_{21}b_{42}b_{76} + a_{87}b_{21}b_{46}b_{72} - a_{87}b_{22}b_{41}b_{76} + a_{87}b_{22}b_{46}b_{71} - a_{87}b_{26}b_{41}b_{72} - \\ - a_{87}b_{26}b_{42}b_{71})(b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41})^{-1}(b_{64} + a_{87}b_{74})^{-1}.$$

В силу этого формируется множество эквивалентных законов управления $K_{(1)}$ путем следующей коррекции матрицы K_1 :

$$K_1 \rightarrow K_1 + \begin{pmatrix} b_{1,11R}^\perp & b_{1,21R}^\perp & b_{1,31R}^\perp & 1 & 0 \\ b_{1,21R}^\perp & b_{1,22R}^\perp & b_{1,32R}^\perp & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varpi_{11} & \varpi_{12} & \varpi_{13} \\ \varpi_{21} & \varpi_{22} & \varpi_{23} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где ϖ_{ij} – произвольные элементы.

Программа аналитического расчета ЗУ при исправной и неисправной исполнительной подсистеме СУ приведена в приложении к диссертации.

Моделирование процессов реконфигурации пилотажного контура СУ ВС осуществлялось для численных значений коэффициентов математической модели ВС для 8 режимов полета. Параметры указанных режимов полета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры исследуемых режимов полета

Параметры полета		Номер режима							
		1	2	3	4	5	6	7	8
H	м	451.1			1066.8		1524	2926.1	7010.4
	ft	1480			3500		5000	9600	23000
V_{CAS}	км/ч	249.8	286.8	296	259	296	370	421.8	481
	kts	135	155	160	140	160	200	228	260

Максимальные скорость и высота полета самолета равны 870 км/ч (0,81М) и 12200 м, соответственно.

На основе банка аэродинамических характеристик самолета, были вычислены все необходимые значения коэффициентов для соответствующих режимов полета. Числовые значения коэффициентов матриц A и B для всех исследуемых режимов полета приведены соответственно в таблицах 2 и 3.

Исследования проводились для возможных сценариев, определяемых различным сочетанием событий (типов и видов отказов и управляющих воздействий). На 8 режимах полета среднемагистрального пассажирского самолета было исследована реконфигурация пилотажного контура СУ для 15 различных отказов, включающих 6 отказов приводов и 6 отказов в виде снижения эффективности управления рулевых органов, как по отдельности,

так и в комбинациях. В итоге было рассмотрено 96 сценариев реконфигурации. Для всех исследуемых случаев полагалось заданным следующее множество полюсов:

$$\text{eig}(A - BK_{\text{рек}}) = \{-1, -1, -1, -1.75, -2.8, -2.8, -3.5\} \subset \mathbb{C}^{\text{stab}}. \quad (23)$$

Элементы множества (23) достаточно близки по модулю к заданным полюсам для продольного и бокового каналов изолированных движений ВС, рассмотренных во втором разделе диссертации. Такие значения заданных полюсов обеспечивают удовлетворительные характеристики устойчивости и управляемости в соответствующих каналах.

Отметим, что исследуемая модель движения ВС без обратных связей не обязательно является асимптотически устойчивой. Например, для первого режима $H=451.1$ м, $V=249.8$ м/с множество полюсов равно

$$\text{eig}(A) = \{-3.4294, -0.6264 \pm 0.8162i, -0.5313 \pm 1.4316i, -0.166, 0.0133 \pm 0.2080i\}. \quad (24)$$

Поскольку в множестве (24) присутствует комплексно-сопряженная пара чисел с положительной действительной частью $0.0133 \pm 0.2080i$, данная модель ВС является колебательно неустойчивой.

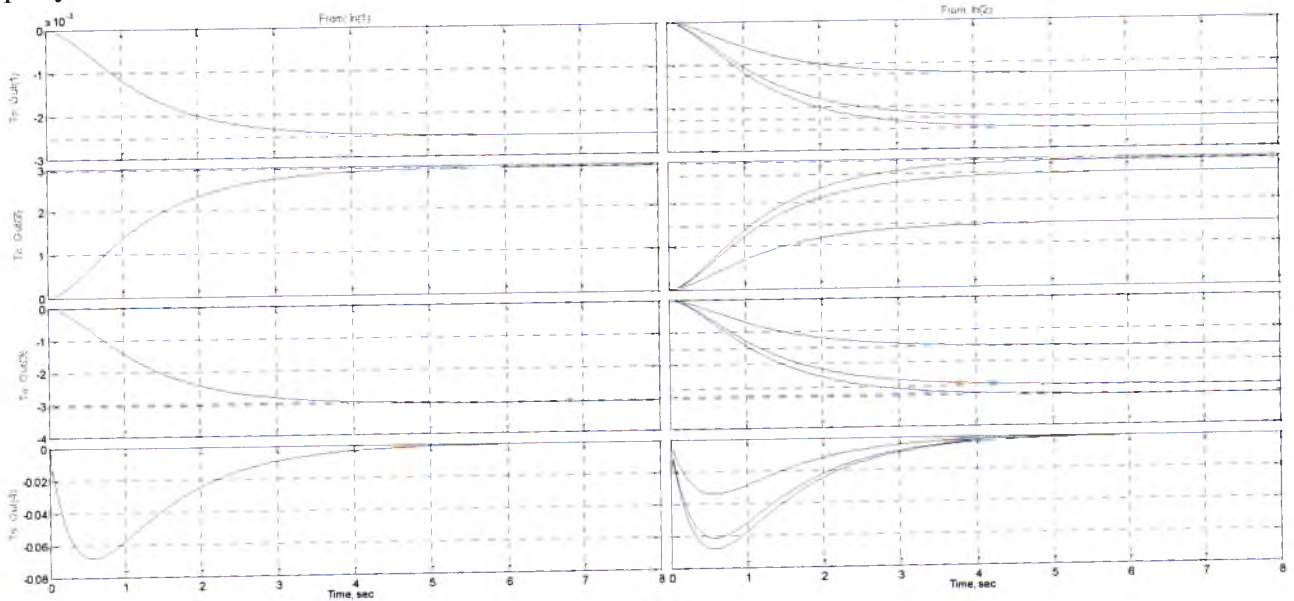
Таблица 2 – Коэффициенты матрицы A по режимам полета

a_*	Режим							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a_{11}	-0.0233	-0.0251	-0.0209	-0.0220	-0.0201	-0.0187	-0.0168	-0.0126
a_{12}	-10.21	-7.9027	-10.849	-11.887	-10.82	-10.587	-10.988	-11.089
a_{13}	-9.8098	-9.8100	-9.8099	-9.8096	-9.8099	-9.8099	-9.8100	-9.8100
a_{21}	-0.0057	-0.0057	-0.0037	-0.0068	-0.0035	-0.0012	-0.0015	-0.0013
a_{22}	-0.9300	-1.1325	-1.2210	-0.8908	-1.1796	-1.2359	-1.5252	-1.2617
a_{23}	0.0008	0.0001	0.0004	0.0012	0.0004	-0.0005	0.0001	0
a_{41}	0.0002	0.0001	-0.0005	0	-0.0005	-0.0004	-0.0006	-0.0012
a_{42}	-0.7897	-1.4636	-1.2300	-0.9345	-1.2415	-1.6436	-2.1373	-3.1107
a_{43}	0.0001	0	-0.0001	-0.0002	-0.0001	0.0001	0	0
a_{44}	-0.2721	-0.3371	-0.3393	-0.2929	-0.3287	-0.3400	-0.3920	-0.3613
a_{55}	0.0278	0.0282	0.0229	0.0246	0.0220	0.0233	0.0220	0.0205
a_{56}	0.1139	0.0563	0.0847	0.0723	0.0851	0.0942	0.0571	0.0414
a_{57}	0.9876	0.9969	0.9931	0.9955	0.9931	0.9906	0.9968	0.9983
a_{58}	0.1370	0.1201	0.1161	0.1289	0.1128	0.0864	0.0723	0.0508
a_{65}	-3.4455	-4.0567	-4.7612	-3.2847	-4.7592	-4.0310	-5.5946	-9.1565
a_{66}	-3.4957	-3.9823	-4.1004	-3.5064	-3.9753	-1.7487	-2.1842	-2.1740
a_{67}	-0.8993	-0.8275	-0.9271	-0.8322	-0.9006	-0.8581	-0.8836	-0.7809
a_{75}	-1.9870	-2.7245	-2.9338	-2.0824	-2.9271	-4.0860	-7.3485	-10.322
a_{76}	0.2042	0.0340	0.1414	0.0797	0.1388	0.1576	0.0509	0.0189
a_{77}	-1.0407	-1.1865	-1.2224	-1.0436	-1.1851	-1.0894	-1.5010	-1.3525
a_{87}	-0.1087	-0.0554	-0.0813	-0.0629	-0.0814	-0.0999	-0.0552	-0.0405

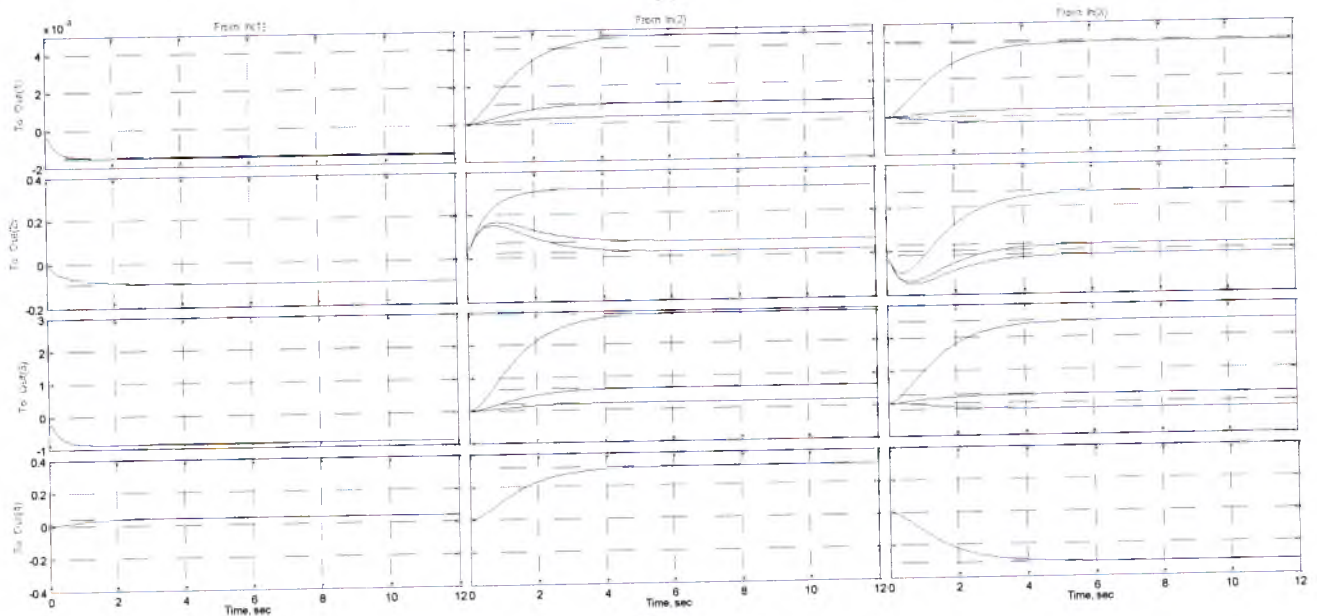
Таблица 3 – Коэффициенты матрицы B по режимам полета

b_*	Режим							
	1	2	3	4	5	6	7	8
b_{21}	0.0178	0.0155	0.0150	0.0093	0.0148	-0.0021	-0.0026	-0.0024
b_{25}	-0.001	-0.0011	-0.0012	-0.001	-0.0011	-0.0009	-0.0012	-0.001
b_{41}	-0.3378	-0.5089	-0.5367	-0.3579	0.5366	-0.7353	-1.0166	-1.2216
b_{45}	-0.0501	-0.0634	-0.0645	-0.0544	-0.0644	-0.0814	-0.1278	-0.1698
b_{54}	-0.0054	-0.0060	-0.0063	-0.0052	-0.0061	-0.0013	-0.0015	-0.0011
b_{61}	0.2052	0.2693	0.2867	0.2198	0.2863	0.3895	0.5794	0.7527
b_{64}	-0.1973	-0.2659	-0.2915	-0.2027	-0.2910	-0.3929	-0.5604	-0.5505
b_{65}	0.5419	0.7736	0.8173	0.5463	0.8156	0.7942	1.1788	1.3880
b_{71}	-0.0092	-0.0121	-0.0129	-0.0099	-0.0129	-0.0156	-0.0261	-0.0339
b_{74}	-3.1463	-4.0119	-4.3539	-3.2558	-4.3476	-4.3085	-6.9865	-8.4561
b_{75}	-0.0579	-0.0435	-0.0612	-0.0507	-0.0614	-0.0287	-0.0381	-0.0144

Характерные графики переходных (а) и импульсных (б) функций в продольном канале ВС в нормальной и аварийной конфигурации исполнительной подсистемы СУ для первого режима полета ($H=451.1$ м, $V=249.8$ м/с) при отказе правого руля высоты приведены на рисунке.



(а)



(б)

Рисунок – Графики переходных (а) и импульсных (б) функций в продольном канале при изменении эффективности управления правого руля высоты от 100% до 50%.

На графиках (а) обозначены: In(1) – реакция на отклонение левого руля высоты; In(2) – реакция на отклонение правого руля высоты; Out(1) – отклонение скорости, м/с; Out(2) – отклонение угла атаки, рад; Out(3) – отклонение угла наклона траектории, рад; Out(4) – отклонение угловой скорости тангажа.

На графиках (в) обозначены: In(1) – реакция на отклонение руля направления; In(2) – реакция на правого элерона, а In(3) – левого элерона. Out(i) совпадают с графиками (а). Везде линии с максимальной амплитудой соответствуют эффективности 100% (нормаль-

ная конфигурация), линии средней амплитуды – эффективности 90% (снижение на 10%), линии минимальной амплитуды – эффективности 50% (снижение на 1/2).

На основе анализа результатов моделирования процессов реконфигурации пилотажного контура СУ при отказах и повреждениях исполнительной подсистемы были сделаны следующие выводы:

- 1) Во всех рассмотренных случаях с формальной точки зрения не произошло нарушения условий полной управляемости модели движения ВС, как динамической ММО-системы, т.е. во всех случаях ранг матрицы управляемости был равен 8 (размерности пространства состояний). Это позволило так реконфигурировать законы управления, что *всегда обеспечивалась устойчивость движения воздушного судна с точно заданными полюсами* (23).
- 2) При постепенных отказах (в смысле уменьшения эффективности рулевых поверхностей) происходило, во-первых, увеличение коэффициентов усиления в обратных связях в исправных каналах исполнительной подсистемы, а, во-вторых, перераспределение управляющих сигналов за счет имеющихся перекрестных связей между каналами управления.
- 3) Однако с позиций *устойчивости и управляемости* ВС некоторые решения оказались неудовлетворительными, поскольку позволяли обеспечивать устойчивость движения при практическом отсутствии возможности маневрирования. Объяснением этого служат слишком малые величины мер управляемости системы, представляющие собой функции грамиана управляемости. В качестве таковой в работе использовалась функция $m_{\text{control}} = P_{ii, \max}^{-0.5}$. Здесь $P_{ii, \max}$ – наибольший диагональный элемент матрицы P решения алгебраического уравнения Ляпунова (грамиана управляемости)

$$P(A - BK_{\text{рек}}) + P^T(A - BK_{\text{рек}}) = -BB^T.$$

Например, для первого режима в нормальной полетной конфигурации данная величина составляет 0.3696 и с нарастанием тяжести отказов снижается от 2 до 7 раз. Другими словами, от 2 до 7 раз уменьшается реакция ВС на одни и те же управляющие сигналы пилота. Тем не менее, во всех исследованных случаях с учетом сделанных предположений реконфигурация была осуществлена успешно, что подтверждает практическую работоспособность предлагаемых алгоритмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных в диссертационной работе исследований сформулированы основные положения аналитического подхода к решению задачи сохранения устойчивости и управляемости воздушного судна при реконфигурации системы управления в условиях отказов и повреждений исполнительных элементов.

Особенность полученных результатов заключается в том, что реализация и адаптация разработанных алгоритмов в бортовых комплексах управления современных и перспективных воздушных судов позволит обеспечить высокий уровень пилотажных характеристик для состояния, обусловленного отказами, в интересах безопасного продолжения и завершения полета.

В работе показано, что декомпозиционный метод размещения полюсов, используемый при синтезе стабилизирующих законов управления, может быть применен и для реконфигурации системы управления воздушного судна. Принципы, положенные в основу данного метода при решении матричных уравнений, могут также лечь в основу получения оптимальных и робастных решений в аналитическом виде за счет использования только алгебраических (арифметических) операций.

На примерах изолированных движений ВС, а также с учетом перекрестных связей по каналам управления, продемонстрирована методика аналитического синтеза законов управления, а также процедура построения множества эквивалентных решений на основе выявленных источников неоднозначности (свободы выбора).

В работе показано, что использование методики реконфигурации и синтезированного в работе аналитического множества стабилизирующих законов управления воздушного судна с исправной и отказавшей системой управления и учетом перекрестных связей между каналами управления позволяет полностью компенсировать последствия отказов исполнительной подсистемы в каждом из каналов управления при соблюдении условий полной управляемости модели движения воздушного судна. Это позволяет таким образом реконфигурировать систему управления, что всегда обеспечивается устойчивость движения воздушного судна с точно заданными полюсами.

При исследовании отказов в виде постепенного снижения эффективности рулевых поверхностей установлено, что в синтезированных аналитических законах управления происходит соответствующее автоматическое увеличение коэффициентов усиления обратных связей исправных каналов исполнительной подсистемы, а также перераспределение управляющих сигналов между управляющими органами за счет имеющихся перекрестных связей между каналами управления.

С позиций устойчивости и управляемости ВС некоторые решения по реконфигурации системы управления оказываются неудовлетворительными, поскольку при обеспечении устойчивости движения существенно ограничивается возможность совершения маневров. Объяснением этого служат относительно малые величины мер управляемости системы, представляющие собой функции от грамиана управляемости и непосредственно связанные с тяжестью отказов исполнительной подсистемы системы управления ВС.

Перспективы. Предлагаемое в работе методическое и алгоритмическое обеспечение реконфигурации СУ ВС при отказах исполнительной подсистемы, основанное на аналитическом синтезе, в дальнейшем существенно облегчит применение аналитического подхода для построения интеллектуальных СУ, обеспечивающих компенсацию динамических (постепенных и перемежающихся) компонентных отказов, а также отказов в информационных и измерительных подсистемах. В дальнейшем предполагается расширить область применения разработанных подходов для моделей ВС с не полностью доступным измерению вектором состояния, в том числе и безынерционных.

Полученные результаты могут быть использованы на этапе конструирования облика перспективных ВС для оптимизации характеристик рулевых приводов с учетом повышенных требований к отказобезопасности СУ.

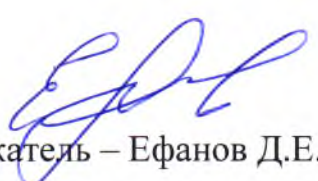
Предложенные в работе методическое и алгоритмическое обеспечение реконфигурации систем управления могут быть использованы как в сфере пассажирских и транспортных перевозок, так и в беспилотной авиации. Научные положения и выводы диссертации, новые постановки частных задач и методы их решения с проведенными обоснованиями могут быть использованы при построении теоретических разделов соответствующих дисциплин, преподаваемых в гражданских военно-учебных заведениях при обучении студентов, а также в научных работах магистрантов и аспирантов.

**Научные публикации в изданиях, рекомендованных ВАК
при Минобрнауки России**

1. **Микрин, Е. А.** Аналитический синтез законов управления продольным движением одновинтового вертолета [Текст] / Е.А. Микрин, Н.Е. Зубов, В.Н. Рябченко, М.Н. Поклад, Д.Е. Ефанов // Автоматизация. Современные технологии. – 2017. – Т. 71. – № 1. – С. 21–26.
2. **Ефанов, Д. Е.** Об аналитическом решении задачи сохранения заданных характеристик устойчивости воздушного судна при реконфигурации системы управления полетом [Текст] / Д.Е. Ефанов, В.В. Косьянчук // Научный вестник ГосНИИ ГА. – 2016. – № 15 (326). – С. 65–81.
3. **Инсаров, В.В.** Интегрированная база данных для решения исследовательских задач тестирования алгоритмов систем технического зрения беспилотных летательных аппаратов [Текст] / В.В. Инсаров, С.В. Тихонова, Д.Е. Ефанов, К.А. Пестов, А.А. Халабуда // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2016. – № 6 (144). – С. 27–34.
4. **Зубов, Н. Е.** Аналитический синтез законов управления продольным движением летательного аппарата [Текст] / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко, Д.Е. Ефанов // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана, серия «Приборостроение». – 2015. – № 2 (101). – С. 3–14. Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_23396644_30029122.pdf
5. **Зубов, Н. Е.** Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерения датчика местной вертикали [Текст] / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, А.С. Олейник, В.Н. Рябченко, Д.Е. Ефанов // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана, серия «Приборостроение». – 2014. – № 5 (98). – С. 3–15.
6. **Мисриханов, М.Ш.** Повышение точности преобразования координат в геоинформационных системах мониторинга электросетевых объектов [Текст] / М.Ш. Мисриханов, Д.Е. Ефанов, А.В. Филимонов // Электро. Электротехника, электроэнергетика, электротехническая промышленность. – 2014. – № 2. – С. 2–6.

Научные публикации в других изданиях

7. **Efanov, D.** The analytic solutions to the task of maintaining the specified characteristics stability in aircraft flight control system reconfiguration [Text] / D. Efanov, V. Kos'yanchuk // MATEC Web of Conferences. – 2017. – V. 99. – P. 03004. Режим доступа: http://www.mateconferences.org/articles/mateconf/pdf/2017/13/mateconf_cmtai2017_03004.pdf
8. **Ефанов, Д. Е.** Матричный метод преобразования прямоугольных геоцентрических координат в геодезические эллипсоидальные [Текст] / Д.Е. Ефанов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, А.В. Филимонов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 10 (22). – С. 23. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1075.html>
9. **Ефанов, Д. Е.** Аналитическое решение заданных характеристик устойчивости воздушного судна при реконфигурации системы управления полетом [Текст] / Д.Е. Ефанов // Сборник трудов конференции «Концепция развития системы безопасности полетов ВС РФ», г. Щелково, 29 декабря 2016 г. – Изд. войсковой части 45095. – С. 1–5.


Соискатель – Ефанов Д.Е.